

¿Igual o distinto?

Mi lado

Su lado

5

1 + 1 + 1 + 1 + 1

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

= : ¿Qué significa?

Resultados

- Identificar los malentendidos que los niños tienen con el signo igual.
- Fomentar las experiencias para preguntar y resolver problemas que aumentan el pensamiento algebraico.
- Fomentar la idea de que los cambios en la educación de matemática se basan en investigaciones relacionadas con el aprendizaje.

Resumen

El enfoque de este módulo es hacer que los padres piensen en cómo sus niños entienden el signo igual. Se incluyó una investigación para demostrar a los padres que los pedagogos la usan para decidir qué se van a enseñar a sus niños. Al considerar el concepto del signo igual y cómo lo malinterpretan los niños, los padres se dan cuenta que el enseñar la comprensión de un tema es la meta de muchos de los programas matemáticos de hoy en día.

En el principio de esta sesión se pide que los niños salgan para que los padres empiecen a formar una idea de los malentendidos que surgen sobre el signo igual. Luego los niños regresan para estar junto a sus padres.

Se les dan a los padres una afirmación abierta $8 + 4 = \square + 5$. Tienen que decidir qué número se puede poner en la caja para que la afirmación sea verdadera. Después de confirmar que la respuesta es 7, se muestra a los participantes las respuestas típicas de estudiantes de 1.º a 6.º grado. En grupos pequeños se conversa sobre qué estaban pensando los niños.

En la siguiente sección, se habla del concepto del signo igual y su importancia para la comprensión algebraica. Se dan a los participantes cuatro afirmaciones numéricas (BLM 100). También se dan las respuestas de los niños. Los participantes determinan el pensamiento de los niños.

En este momento los participantes practican preguntando. Cuando los niños regresan, los padres les dan a ellos unas afirmaciones numéricas. Los padres hacen preguntas y escuchan para captar cómo sus hijos entienden el signo igual. Es importante que los padres entiendan que este es el momento para entender cómo sus niños piensan, y no es el momento para enseñar.

Se deja tiempo para procesar este módulo. Hay mucha información y los participantes necesitan un tiempo para procesarla. Se pregunta a los participantes algunos de los conceptos importantes, el significado del signo igual, y cómo se podrían usar las habilidades para preguntar que se mencionaron durante la sesión.

Al final de la sesión, se les entregan a los participantes actividades para hacer con sus hijos en casa.

Conocimiento matemático

Es importante que los niños sepan que el signo igual significa que la expresión de un lado del signo tiene el mismo valor que la expresión al otro lado del signo. Las investigaciones actuales sobre el pensamiento matemático de los niños, indican que los niños malinterpretan el significado del signo igual. Estos malentendidos permanecen con muchos niños hasta el 6.º u 8.º grado y a veces hasta secundaria. Al leer el artículo, "Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra", por Karen Falkner, Linda Levi y Thomas P. Carpenter, de la publicación de NCTM, *Teaching Children Mathematics*, volumen 6, diciembre de 1999, p. 232, se da una base matemática en este módulo. Cuando los estudiantes entienden que el signo igual señala la igualdad de ambos lados, se puede usar su sentido numérico para resolver ecuaciones, usando varias estrategias diferentes.

El signo igual como un signo de "hacer"

Se presentan el signo de igual a los niños cuando empiezan a añadir y restar.

$$1 + 3 =$$

$$2 + 4 =$$

$$5 - 2 =$$

En este contexto, el signo igual parecer decirles que hagan la operación en el lado izquierdo. Algunos niños interpretan el signo como el signo de "hacer." Como resultado, frecuentemente los niños creen que una afirmación como $13 = 6 + 7$ no es una afirmación verdadera porque está escrito al revés. También $6 = 6$ no es una afirmación verdadera porque no hay nada que hacer. Para que parezca correcta ellos la escriben de nuevo como, $6 + 0 = 6$. Con este malentendido, el resolver ecuaciones algebraicas puede ser confuso.

Las afirmaciones falsas y verdaderas

Se usan las afirmaciones falsas y verdaderas frecuentemente para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión del signo igual. Hay muchas maneras de determinar si una afirmación numérica es verdadera o falsa.

Haciendo que un lado de la ecuación sea igual al otro

¿Es $3 \times 5 + 4 = 10 + 9$ verdadero o falso?

Puede intentar que ambos lados parecen iguales:

3×5 es $5 + 5 + 5$ 10 es $5 + 5$ y 9 es $5 + 4$

así que, $5 + 5 + 5 + 4 = 5 + 5 + 5 + 4$. Verdadero

Realizando la misma operación en ambos lados del signo igual

¿Es $3 \times 5 + 4 = 10 + 9$ verdadero o falso?

Puedo hacer las operaciones:

$3 \times 5 + 4$ es 19 $10 + 9$ es 19 .

$19 = 19$. Verdadero.

Usando relaciones numéricas

¿Es $100 \times 4 = 200 + 205$ verdadero o falso?

Puedo usar relaciones

par \times par = números pares

(así que 4×100 es un número par)

numéricas:

un número par + un número impar = es un número impar

(así que $200 + 205$ es un número impar)

Esta declaración numérica no puede ser verdadera.

Además de cumplir la tarea de aclarar el significado del signo igual, las declaraciones verdaderas o falsas ayudan a los estudiantes a desarrollar una fluidez con números y formar una base para el pensamiento algebraico. Por ejemplo, el determinar si $3 + 6 = 6 + 3$ es una afirmación verdadera lleva a la comprensión de la propiedad conmutativa para la adición.

Conocimiento matemático

Términos para este módulo

Expresión: 5×3 , $5 + 2$, y $m + 2$ son expresiones. Piensa en una expresión como una frase, o una parte de una oración. Una expresión no contiene un signo igual.

Ecuación o oración numérica

$5 + 2 = 7$ es una ecuación. Piensa en una ecuación como un pensamiento completo. Una ecuación es una declaración matemática que contiene un signo igual. Una ecuación o oración numérica puede ser falsa o verdadera. Cuando hay una incógnita en la ecuación, por ejemplo $m + 3 = 7$, el valor de m para que la ecuación se verdadera se llama solución.

Variables o incógnitas

Muchas expresiones, ecuaciones, y oraciones numéricas tienen una cantidad desconocida. A veces se la muestra con una caja, un área subrayada, o quizás dejado en blanco. Los problemas originales de 1.º y 2.º grado que aparecen como $8 + 3 = ?$ tienen una cantidad desconocida en el lado derecho de la ecuación. Otras veces se muestran las cantidades desconocidas usando una letra como x , n , o y . Una letra que se usa para representar una cantidad desconocida se llama una variable.

Artículo

Esquina de educación primaria

Karen P. Falkner
Linda Levi y
Thomas Carpenter

Karen Falkner, kfalkner@Madison.k.12.wi.us, es una maestra de primaria en la escuela primaria Lapham en Madison WI 53703. Ella está participando ahora en un estudio del pensamiento algebraico de los niños. Linda Levi, llevi@facstaff.wisc.edu, y Thomas Carpenter, tcarpenter@facstaff.wisc.edu, están afiliados con el Centro de Recursos Educativos de Wisconsin en Madison, WI 53706. Ambos estudian el desarrollo del pensamiento algebraico de los niños.

Preparado por Kate Kline, kate.kline@wmich.edu, Departamento de Matemáticas, Universidad de Michigan, Kalamazoo, MI 49008. Este artículo enfatiza la idea de que los maestros de primaria deben apoyar el entendimiento que los niños tienen de la matemática en un contexto que respete su conocimiento sobre las maneras en que los niños de pre jardín a jardín aprenden matemática. Los lectores pueden mandar al editor sus reacciones sobre esta sección.

232

Lo que entienden los niños sobre el concepto de igualdad: una base para el álgebra

Muchos estados y distritos así como las Normas y Principios de Matemática Escolar: Forma Discurso (NCTM 1998), recomiendan que el álgebra debe ser enseñada en los grados primarios. Aunque los niños pequeños entienden mucho más de lo que pensamos, los adultos suelen tener dificultad conceptualizando lo que constituye una álgebra apropiada para los primeros grados de primaria. Quince maestros y tres investigadores universitarios se encuentran ahora estudiando un proyecto para definir qué enseñanza de álgebra es apropiada para los niños pequeños. En este artículo, discutimos el concepto de igualdad, el cual es una idea crucial para desarrollar el pensamiento algebraico en los niños.

Malentendidos con el signo igual

A pesar de que los maestros frecuentemente usan el signo igual con sus alumnos, es interesante explorar

lo que los niños entienden sobre la igualdad. Al comienzo de este proyecto muchos maestros presentaron a sus alumnos el siguiente problema:

$$8 + 4 = _ + 5$$

Al principio este problema pareció muy simple para algunos maestros. Una maestra de sexto grado, por ejemplo, nos dijo “Claro, yo le daré este problema a mis estudiantes, pero no tengo idea de como les ayudará eso a ustedes”. Esta maestra descubrió que sus veinticuatro estudiantes respondieron que 12 era la respuesta para éste problema. Esto le pareció tan interesante que antes de que nos dieramos cuenta, ella ya les había dado el mismo problema a otros maestros de sexto grado de su escuela para que se lo presentaran a sus estudiantes. Como se muestra en la Tabla 1, todos los 145 estudiantes de sexto, a los cuáles se le dió el problema pensaron que la respuesta era 12 o 17.

¿Por qué tantos estudiantes tuvieron dificultad con este problema? Esta claro que estos estudiantes tienen un entendimiento muy limitado sobre la igualdad y sobre el signo de más si ellos piensan que 12 o 17 es la respuesta. Muchos niños pequeños si entienden el concepto de modelar situaciones dónde deben hacer cosas iguales. Por ejemplo, Mary Jo Yttri, maestra de kinder, les dió este problema a sus estudiantes $4 + 5 = _ + 6$. Todos los niños pensaron que la respuesta era 9. La maestra modeló este problema a sus estudiantes. Juntos hicieron una pila de cuatro cubos, luego una pila de cinco cubos. En otro espacio, hicieron una pila

Artículo

de nueve y seis cubos. Yttri preguntó a los niños si cada arreglo tenía el mismo número de cubos. Los niños sabían que los grupos no tenían el mismo número de cubos y pudieron decirle cuál grupo tenía más. Varios niños pudieron decirle a la maestra como podrían hacer que los grupos tuvieran el mismo número de cubos. A pesar de esto, después de hacer la actividad los niños siguieron pensando que la respuesta era nueve.

Este incidente sorprendió mucho a Yttri y a los investigadores. Todos asumimos que los niños de jardín iban a tener muy poca experiencia con el signo igual y que por lo tanto no podrían tener malentendidos con el concepto de igualdad como desmostraron los niños mayores. Pero también los niños de jardín suelen tener malentendidos sobre el significado del signo igual y estos no se eliminan por medio de unos cuántos ejemplos o una simple explicación. Este incidente también indica que niños pequeños de jardín pueden entender correctamente las relaciones de igualdad cuando usan objetos pero tienen problemas al tratar de comunicar su entendimiento por medio de manera simbólica con el signo igual. Este conocimiento se obtendrá con el tiempo por medio de repases y práctica de la igualdad. Los maestros deben poner atención a lo que los niños saben sobre la igualdad en cuanto a las operaciones numéricas presentadas. De otra manera, las malinterpretaciones sobre la igualdad podrían ser mayores. (vea “Sobre Matemática” en la página 234.)

Como documentaron Behr, Erlwanger y Nichols (1975); Erlwanger and Berlanger (1983); y Anenz-Ludlow y Walgamuth (1998), los niños en los grados de primaria piensan que con el signo igual tienen que resolver el problema de viene antes del signo y que el número después del signo es siempre la respuesta al problema. Los niños de primaria usualmente no ven el signo como un símbolo que expresa la idea de “es lo mismo que”. No existe mucha variedad en la manera que el signo igual es usado en las escuelas primarias. Casi siempre el signo viene al final del problema y sólo un número puede ir después del signo.

Con problemas como $4 + 6 = 10$ ó $67 - 10 - 3 = 54$, los niños tienen toda la razón de pensar que el signo de igualdad significa resolver la operación.

Primer y segundo grado

Karen Falkner se encuentra en estos momentos enseñando una clase de primer y segundo grado. Los niños de estas clases típicamente están con el mismo maestro por dos años. Lo que sigue en este artículo habla sobre como estos niños progresaron en el entendimiento de igualdad en un periodo de un año y medio.

Por algún tiempo el resolver problemas fue parte integral de la forma que la maestra enseñaba matemática. A los niños se les pedía que escribieran problemas de matemática y demostraran como lo habían resuelto. La maestra deseaba que sus estudiantes tuvieran éxito por eso cuando les pidió que resolvieran el problema $8 + 4 = \square + 5$ se sorprendió que sus estudiantes respondieran igual que como los investigadores habían previsto. Muchos pusieron 12 como respuesta y otros pusieron 17. La conversación que siguió fue interesante. Algunos dijeron que 12 debía ser la respuesta porque “ocho más cinco es doce”.

Lo siguiente indica como fue la discusión en más detalle.

Falkner. Es $8+4$ lo mismo que $12+5$?

Ana. No.

Falkner. ¿Entonces por qué pusiste 12 en la caja?

Ana. Porque $8 + 4$ es igual a 12, ¿ve? (contando con su dedos) Es 8, 9, 10, 11, 12. (Muchos niños asentaron con sus cabezas que era correcto.)

Falkner. ¿Alguien obtuvo otra respuesta?

Adam. Es 7

Falkner. ¿Porque?

Adam. Porque tiene la misma cantidad en ambos lados del signo de igual. Eso es lo que significa el signo.

Falkner. Ya veo, bien Adam, ¿podrías repetirlo otra vez?

Porcentaje de niños que dieron estas respuestas al problema $8 + 4 = \square + 5$						
Grado	Resupestas dadas					Numero de niños
	7	12	17	12 y 17	Otro	
1	0	79	7	0	14	42
1 y 2	6	54	20	0	20	84
2	6	55	10	14	15	174
3	10	60	20	5	5	208
4	7	9	44	30	11	57
5	7	48	45	0	0	42
6	0		84	14	2	0 145

Artículo

(Adam repitió la explicación. Otros niños consideraban a Adam como líder de la clase y lo escucharon atentamente.)

Falkner. (mirando al problema del pizarrón) Entonces Adam, tu dices que el signo igual significa que la cantidad que está a un lado del signo debe ser la misma que la del otro lado. (Mirando a la clase) ella les pregunta ¿Qué piensan ustedes de lo que dice Adam?

Ana. Sí, pero tiene que ser 12 porque eso es lo que $8 + 4$ es.

Dan. No, Adam está correcto, lo que está a un lado del signo debe ser lo mismo que lo que está al otro lado $8 + 4 = 12$ y

$7 + 5 = 12$, entonces el 7 va en la caja.

La clase siguió conversando sobre el problema. El signo igual es una convención, es el símbolo escogido por matemáticos para presentar la idea de igualdad. Como no existe razón lógica para que el signo de igual no signifique “resolver”, Falkner pensó en que lo apropiado era decirle a la clase que ella estaba de acuerdo con Adam y Dan y prefirió no decirles lo que significaba el signo igual. Era suficiente que los niños entendieran un poco como usar el signo.

Falkner escogió entonces ayudar a los niños a desarrollar el entendimiento usando afirmaciones

verdaderas o falsas, esta conversación va con el trabajo de Robert Davis (1964). Falkner les presentó a sus estudiantes problemas similares a los siguientes y les pidió que respondieran si eran falsos o verdaderos.

$$\begin{array}{lll} 4 + 5 = 9 & 12 - 5 = 9 & 7 = 3 + 4 \\ 8 + 2 = 10 + 4 & 7 + 4 = 15 - 4 & 8 = 8 \end{array}$$

Las reacciones de los niños fueron interesantes. Todos pensaron que la primera respuesta era verdadera y que segunda era falsa. Pudieron probar éstas de varias maneras. No estuvieron muy seguros de las otras afirmaciones.

Falkner. ¿Qué piensan de éste problema?

$7=3+4$. ¿Es falso o verdadero? (hubo mucha incomodidad, los niños se movían y murmuraban)

Gretchen. Sí, $3 + 4$ si es igual a 7.

Ned. Pero el problema está incorrecto.

Ana. Esta al revés.

Falkner. Pero Adam nos dijo que el signo igual dice que los dos lados son iguales. ¿Es cierto?

Ana. Sí, pero está incorrecto.

Falkner. Tratemos esto (ella modela el problema dándole a un niño 7 cubos y pidiéndole que se pare cerca de ella. Luego le dio a otro niño cuatro en una mano y 3 en otra y se paró al otro lado de ella). Ella dijo, ahora ¿tienen estos niños el mismo número de cubos?

La clase. Sí.

Sobre la matemática

Los niños deben entender que igualdad es la relación que expresa la idea que dos expresiones matemáticas tienen el mismo valor. Es importante que los niños entiendan esta idea por dos razones. Los niños tienen que pensar en relaciones que se expresan en los problemas o operaciones numéricas. Por ejemplo $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ expresa una relación matemática que es importante en aritmética. Cuando un niño dice “no recuerdo cuanto es $7 + 8$ pero sé que $7 + 7$ es 14 y uno más son 15” él o ella está explicando una relación importante que se expresa por medio de esa oración. Los niños que entienden igualdad podrán representar estas ideas matemáticas y comunicar y reflexionar sobre estas ideas. A un niño que se le da la oportunidad de expresar y reflexionar sobre este tipo de problemas, $17 - 9 = 17 - 10 + 1$ podrán usar este principio y resolver problemas más difíciles como $45 - 18$, diciendo que $45 - 18 = 45 - 20 + 2$. Este ejemplo muestra las ventajas de integrar la enseñanza de aritmética con álgebra. Al hacer esto los maestros ayudan a aumentar el conocimiento

de aritmética y al mismo tiempo que los ayuda a entender álgebra.

La segunda razón de la importancia del concepto de igualdad es que al no entender los conceptos básicos los estudiantes tienen muchísimos problemas para pasar de aritmética al álgebra (Kieran 1981; Matz 1982). Considere por ejemplo, la siguiente ecuación $4x + 27 = 87$. ¿Cómo empezaría a resolver esta ecuación? El primer paso es restar 27 de 87. ¿Por qué? Lo hacemos porque debemos restar 27 de cada lado de la ecuación. Si el signo igual significa una relación entre dos expresiones, tiene sentido si las dos cantidades son iguales, entonces 27 menos de la primera cantidad deberá ser 27 menos también de la segunda cantidad. ¿Qué pasa con los niños que piensan que el signo de igual significa que deben de hacer algo? ¿Podrían ellos entender esto? Estos niños usualmente tratan de memorizar reglas a seguir, muchas veces no las pueden recordar correctamente o aplicar. Por estas razones es importante que los niños entiendan que igualdad es una relación en vez que es algo que deben hacer.

Artículo

Falkner. ¿Importa de que lado mio están ellos? (ella les pide a los niños que se cambien de lado.)

La clase. No, pero...

Como se pude imaginar el cuarto problema causó confusión, Muchos niños pensaron que el problema era verdadero porque $8 + 2 = 10$ pero niños que entienden el concepto dijeron que $8 + 2$ es 10 y $10 + 4 = 14$ y que 10 y 14 no era lo mismo.

Cuando Falkner llegó a la última pregunta, $8 = 8$, la clase estaba muy confundida. Ana respondió, “bueno 8 y 8 si son lo mismo pero no se debe escribir de esa manera”. En las semanas que restaban de clase Falkner continuó dándoles ese mismo tipo de problemas para practicar teniendo el signo igual en diferentes posiciones.

El siguiente año

En el otoño, Falkner les presentó el mismo problema $8 + 4 = _ + 5$ a la clase. Pocos de los niños, pero no todos de los niños que estaban el año pasado, pudieron resolverlo correctamente. Muchos pusieron 12; otros estaban confundidos y pidieron ayuda. Se discutió el tema de igual manera que el año anterior. Esta vez, algunos niños entendieron el concepto y explicaron porque 7 era la respuesta. Lillie dió una buena explicación. “El signo igual significa que tienen que ser iguales. Las cantidades deben ser las mismas en ambos lados del signo (haciendo movimiento con sus manos). Es como una balanza, tiene que estar al mismo nivel”.

Esta conversación fue una de muchas sobre este tipo de problemas. Muchos niños todavía dudaban y otros se sentían muy seguros que el signo significaba tener las mismas cantidades. Mientras se conversaba, la maestra anotaba las expresiones, quién hablaba y como poco a poco los estudiantes iban entendiendo pero aun no el concepto de igualdad. La maestra notó que tenían que seguir practicando durante el año.

Falkner presentó el concepto de igualdad de dos maneras. Primero continuó presentando problemas de oraciones numéricas usando en número faltante en diferentes partes del problema. Algunos ejemplos de estos problemas incluyeron lo siguiente: $_ + 5$, $7 + 8 = _ + 10$, y $7 + _ = 6 + 4$.

La segunda manera fue presentando oraciones falsas y verdaderas como esas de los ejemplos para motivar a los estudiantes a reflexionar sobre el significado del signo igual. También les pidió a sus estudiantes que escribieran sus propias oraciones falsas y verdaderas. El trabajo que Falkner usó para desarrollar el conocimiento de los niños sobre la igualdad fue el mismo que uso para desarrollar el conocimiento de las operaciones numéricas.

DICIEMBRE DE 1999

A medida que pasaba el año, más y mas niños empezaron a entender el concepto de igualdad. En marzo, la clase tuvo la siguiente conversación:

Falkner. Miren esta oración numérica: $8 + 9 = _ + 10$. ¿Qué número debe ir en la caja?

Carrie. Debe ser 17.

Skip. Pero $8 + 9$ dará 17, entonces $17 + 10$ darán 27, por eso no puede ser 17 la respuesta.

Myra. Es verdad; $17 + 10$ no suman 17.

Ned. Yo pienso que debe ir 7 en la caja, $7 + 10$ es 17 y $8 + 9$ es 17. Ambos lados son iguales (la clase estaba de acuerdo, aunque Carrie no estaba convencida).

Falkner. Piensen en lo que sabemos sobre el signo de igualdad. “Si, ocho es igual a ocho, pero no lo puede escribir de esa manera” Miren esta oración: $4898 + 3 = 4897 + _$. ¿Pueden resolver ésta sin sumarla?

Larry. Yo creo que 4 es la respuesta; 4897 es uno menos que 4898, entonces nada más se debe agregar uno al 3.

Falkner. ¿Alguien lo hizo de otra manera? (los niños mueven sus cabezas, en general todos están de acuerdo con la respuesta de Larry y piensan que es fácil).

“Sí, ocho es igual a ocho, pero uno no debe de escribirlo así”

Conversaciones como estas sobre oraciones numéricas le dan a los niños una buena práctica y base para conversar sobre la igualdad todo el año. A medida que continúe el año más y más conversaciones con el concepto de igualdad se integraron a conversaciones sobre otros conceptos de álgebra. En el ejemplo siguiente, los niños conversaron sobre problemas más sofisticados que integraban el entendimiento de variables y operaciones así como también de igualdad.

Falkner pidió a la clase que miraran la oración $a = b + 2$. Ella les dijo que esta oración era verdadera y les preguntó ¿cuál era mayor la a o la b ? Los niños que piensan que se debe hacer algo tendrán un problema con esta oración. Porque 2 se agrega a la b y nada se agrega a la a , y por eso pueden pensar que la b es mas grande. La clase estuvo de acuerdo que la a y la b eran símbolos de variables, así como lo eran una caja o un triángulo. Luego la clase decidió que la a era mayor y sus argumentos para esa posición demostró claramente que entendían sofisticadamente el concepto de igualdad.

Falkner. ¿Porqué piensan que a es mayor?

Ana. Ellos separaron la b y el 2, la a los une.

Jerry. Yo creo que a (es mayor). Eso más 2 es parte de a .

235

Artículo

Myra. Sí, a tiene que ser mayor porque lo que sea que $b + 2$ sea tiene que ser mayor que b porque están combinados.

Ana. Es cierto, a tiene el $+2$ en ella y b no lo tiene.

Lillie. Juntos tienen que ser lo mismo; $b + 2$ tiene que ser lo mismo que a .

Conclusión

Conversaciones como éstas formuladas por un gran número de niños indican que los niños han aprendido a ver al signo igual como un símbolo que describe una relación y no un símbolo para “hacer”. Debido a que este artículo fue escrito antes del fin de año escolar, no obtuvimos información sobre como los niños entendieron el problema $8 + 4 = _ + 5$ en la clase. En un problema piloto similar de estudiantes de primer y segundo grado en el mismo pueblo, encontramos que al final de año catorce de dieciseis niños contestaron que 7 era la respuesta a este problema. Ya que nosotros hemos reflexionado en nuestra presentación sobre igualdad y el signo igual en esta clase y en otras, no deja de impresionarnos el interés y el entusiasmo que los niños tuvieron en cada una de las discusiones. Lillie usó su metáfora del juego de pelota con el entusiasmo de un niño que está listo para jugarlo. Skip estaba molesto de que alguien quisiera llenar el espacio con la ecuación de $17 = 27$. Estas no son las respuestas aburridas de niños que están ansiosos por salir al recreo sino niños que están aprendiendo y explorando un nuevo mundo pensando y comunicando matemáticamente, y disfrutando del poder del entendimiento o conocimiento. Estos niños están desarrollando un entendimiento de la igualdad mientras aprenden sobre números y operaciones. Este entendimiento les permitirá reflexionar sobre las operaciones y formar una base firme para que después puedan entender el álgebra.

Referencias

- Anenz-Ludlow, Adalira, and Catherine Walgamuth. “Third Graders’ Interpretations of Equality and the Equal Symbol.” *Educational Studies in Mathematics* 35 (1998); 153-87.
- Behr, Merlyn, Stanley Erlwanger, and Eugene Nichols. *How Children View Equality Sentences*. PMDC Technical Report, no. 3. Tallahassee, Fla.: Florida State University, 1975. ERIC No. ED 144 802.
- Davis, Robert B. *Discovery in Mathematics: A Text for Teachers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1994.

Erlwanger, Stanley, and Maurice Berlander. “Interpretations of the Equal Sign among Elementary School Children.” In *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Montreal: 1983.

Kieran, Carolyn. “Concepts Associated with the Equality Symbol.” *Educational Studies in Mathematics* 12 (August 1981): 314-26.

Matz, Marilyn. “Towards a Process Model for School Algebra Errors.” In *Intelligent Tutoring Systems*, edited by Derick Sleeman and John Seeley Brown, 25-50. New York: Academic Press, 1982.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*. Reston, VA.: NCTM 1998.

The research reported in this article was supported in part by a grant from the U.S. Department of Education, Office of Education Research and Improvement, to the National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (R305A60007-98). The opinions expressed do not necessarily reflect the position, policy, or endorsement of the supporting agency.

Arreglo del salón

- Escritorios o mesas en grupos de 4 a 6
- Mesa para la hoja de registro de firmas, materiales, cálculos aproximados, y aperitivos
- Proyector y pantalla
- Papel y un caballete
- Cartel con la agenda

Materiales

Facilitador	Transparencias
<ul style="list-style-type: none"> • Proyector de transparencias • Bolígrafos para las transparencias • Transparencias, en blanco • Papel para el caballete • Marcadores para el papel del caballete • Cinta adhesiva • Reloj automático (opcional) 	<p><i>BLM 1: Bienvenidos</i> <i>BLM 99: Respuestas de los niños</i> <i>BLM 100: Estadísticas</i> <i>BLM 101: Falso o verdadero</i> <i>BLM 102: Investigando el pensamiento</i> <i>BLM 105: El estándar de álgebra de NCTM</i></p>
Participante	Hojas
<p>Individuos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lápiz • Papel • Cubos de colores, cuadros, u otros materiales prácticos • Reflexión 	<p>Uno por participante para clase <i>BLM 100: Estadísticas</i> <i>BLM 101: Falso o verdadero</i> <i>BLM 103: Resolviendo problemas</i> Uno por participante para clase y para la casa: <i>BLM 102: Investigando el pensamiento</i> <i>BLM 104.1-2: En casa con el signo de igual</i> Uno para cada participante para casa (una copia de la tabla del juego y las cartas del juego en cartulina) <i>BLM 106.1-3: El juego de equiparar</i></p>

Tiempo necesario

1 hora y 45 minutos

Tiempo y organización (1 hora y 45 minutos)

Parte 1: Preparando el salón y empezando (10 minutos) - sin niños

Haga una transparencia de:

BLM 1: Bienvenidos

Distribuya a cada participante:

Papel, lápiz y materiales prácticos

Parte 2: Creando ambiente (15 minutos)

Haga una transparencia de:

BLM 99: Las respuestas de los niños

BLM 100: Estadísticas

Haga copias para cada participante:

BLM 100: Estadísticas

Parte 3: El signo de igual (15 minutos)

Haga una transparencia de:

BLM 101: Verdadero o falso

Haga copias para cada participante:

BLM 101: Verdadero o falso

Parte 4: Desarrollando una comprensión del signo igual (20 minutos)

Haga una transparencia de:

BLM 102: Investigando el pensamiento

Haga copias para cada participante:

BLM 102: Investigando el pensamiento

Parte 5: Trabajando con estudiantes (25 minutos)

Haga copias para cada participante::

BLM 103: Resolviendo problemas

BLM 104.1-2: En casa con el signo igual

Parte 6: Conexiones (10 minutos) - con niños

BLM 105: El estándar de álgebra de NCTM

Parte 7: Aplicaciones para llevar a casa (5 minutos)

Copias distribuidas en Parte 4 y Parte 5

BLM 102: Investigando el pensamiento

BLM 104.1-2: En casa con el signo igual

Haga copias para cada participante: (haga un copia de la tabla del juego y las cartas del juego en cartulina)

BLM 106.1-3: El juego de igualar

Parte 8: Cierre (5 minutos)

No hay ni transparencias ni hojas

Distribuya reflexiones o evaluaciones y premios para la actividad de cálculo aproximado

Recursos de los facilitadores

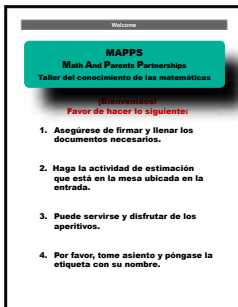
Artículos

Falkner, Karen P., Levi, Linda , and Carpenter, Thomas P. , “*Children’s Understanding of Equality: A Foundation for Algebra*”, *Teaching Children Mathematics*, Volume 6, Number 4, December 1999, p. 232.
(el artículo viene después del Fondo matemático para el uso de los facilitadores)

Libros

Standards 2000 Project, *Principles and Standards for School Mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. (NCTM), 2000, P. 48-51, ISBN 0-87353-480-8, www.nctm.org

Actividades

Preparación del salón	Notas
<ol style="list-style-type: none"> Arregle una mesa con la hoja de registro de firmas, etiquetas para los nombres y los aperitivos. En otra mesa ponga las actividades de cálculo aproximado. Arregle las mesas o escritorios en grupos de 4 a 6. Muestre la transparencia BLM 1: Bienvenidos Antes de que los participantes lleguen, ponga lápices, papel y los materiales prácticos en las mesas de los participantes. Prepare y muestre un cartel con la agenda y el propósito de la sesión. 	<p>BLM 1: Transparencia</p> 
Parte 1: Empezando (10 minutos) - sin niños	
<p>Presentaciones</p> <ol style="list-style-type: none"> Preséntese y luego haga que los participantes se presenten. Brevemente explique el programa MAPPS y pídale a las personas que ya han participado en MAPPS que compartan sus experiencias. Revise la agenda y el propósito de la sesión. Infórmeles que la sesión se enfoca a ayudarlos a entender cómo piensan sus hijos sobre un concepto algebraico muy importante y que se les darán algunas estrategias para hacer preguntas mientras trabajan con sus hijos. Diga: <p><i>El pensamiento algebraico es muy importante a nivel de escuela primaria ya que en secundaria los malentendidos previene que sigan adelante aprendiendo matemática. Investigaciones demuestran que las ideas erróneas de algebra comienzan en los grados primarios. Nosotros exploraremos una de esas ideas esta noche.</i></p> <p>La sesión empieza con los padres aprendiendo sobre cómo piensan sus hijos. Luego los niños se reúnen con sus padres y así ellos pasan un tiempo aprendiendo sobre como piensan sus hijos y haciendo preguntas que ayudan a sus hijos a mejorar el pensamiento matemático. Al final de la sesión ellos reciben algunos problemas para hacer con sus hijos en casa.</p>	
Parte 2: Creando el ambiente (15 minutos)	



Actividades

Parte 2: Creando el ambiente (continuación)

2. Pida a los participantes que piensen que número debe ir dentro del cuadro para hacer que esta afirmación sea verdadera. Deles tiempo para que piensen y luego que compartan sus ideas en grupos pequeños.

3. Pida a los participantes que compartan sus respuestas y que expliquen como obtuvieron su(s) respuesta(s). Indique que la respuesta correcta es 7 porque $8 + 4 = 12$ y $7 + 5 = 12$. Los dos lados del signo igual son iguales.

4. Dígales a los participantes que esta misma pregunta se la ha hecho a muchos niños de primaria. Comparta con ellos las respuestas dadas típicamente por los niños enseñando la transparencia **BLM 99: Las respuestas de los niños**. Pida a los participantes que discutan cada una de las respuestas en sus grupos. Pregunte:

¿Qué estaría pensando cada niño cuando eligieron cada una de esas respuestas?

5. Pida a los grupos que piensen sobre el pensamiento de los niños. Anote esto en la transparencia **BLM 99: Las respuestas de los niños**. Vea **Nota A** para las respuestas típicas de cada una de las contestaciones.

Estadísticas

1. Distribuya y muestre **BLM 100: Estadísticas**. Diga:

Esta hoja muestra las diferentes respuestas que los estudiantes de primer a sexto grado dieron para cada pregunta. El número es el porcentaje de estudiantes que obtuvieron la respuesta en la columna especificada.

2. Indique la hilera del quinto grado y diga:

Esto significa que 7 % o 7 de 100 estudiantes de quinto obtuvieron la respuesta 7 correcta mientras 48% dieron la respuesta 12, 45 % dijeron 17 y 0% pensaron que ambos 12 y 17 eran correctas.

3. Deles a los participantes unos minutos para que discutan la hoja en parejas o en grupos pequeños. Luego pregunte si tienen preguntas o comentarios sobre la información. Discuta brevemente sobre los comentarios o preguntas. Probablemente los participantes preguntarán por qué 0 % de los estudiantes de sexto grado obtuvieron la respuesta correcta. Esto es muy curioso. No hay explicación.

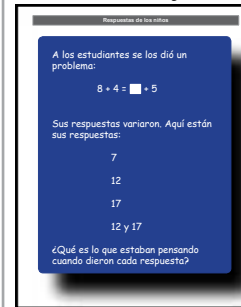
Parte 3: El signo igual (15 minutos)

Malentendidos

1. Diga a los participantes que las personas que han

Notas

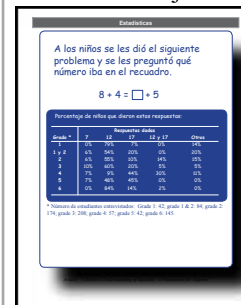
BLM 99: Transparencia / Hoja



A. NOTA: las respuestas típicas a este problema son:

7 porque $8 + 4$ es 12 y $7 + 5$ es 12
 12 porque $8 + 4 = 12$
 17 porque $8 + 4 = 12 + 5 = 17$
 12 y 17 porque $8 + 4 = 12$
 y $12 + 5 = 17$

BLM 100: Transparencia / Hoja



Parte 3: El signo de igual (continuación)

Actividades

Parte 3: El signo igual (continuación)

estudiado el trabajo de niños en este tipo de problema han determinado que los niños tienen ideas erróneas sobre el signo igual. Estos malentendidos empiezan a una edad temprana y muchísimas veces continúan a los grados superior de primaria y hasta secundaria. El signo igual es un concepto muy importante ya que es la base del razonamiento algebraico. El álgebra se basa en ecuaciones, balanceando los dos lados de la ecuación. El malentendimiento del signo igual usualmente lleva a los niños a frustrarse con el álgebra. Muchos niños no entienden que el signo igual quiere decir "lo mismo que" o "tiene el valor de".

2. Escriba el signo igual y escriba "es lo mismo que" al lado del signo igual.

Vamos a ver unas afirmaciones específicas y las respuestas dadas por los niños para cada una de ellas

3. Distribuya y muestre **BLM 101: Verdadero o falso.**

Estos problemas son todos verdaderos. Cuando se les pregunta a los niños si son falsos o verdaderos, sus respuestas nos dicen bastante sobre lo que entienden sobre el signo igual.

4. Lea las declaraciones y respuestas en voz alta y pida a los participantes que conversen en parejas o grupos pequeños para determinar qué piensan los niños del significado del signo igual. Después de 5 minutos, pregunte:

¿Qué piensan los niños que significa el signo igual?

Respuestas posibles: El signo igual . . .

- es donde pone las repuesta
- te dice que hagas algo
- es el final del problema

¿Qué causa que los niños tengan estas ideas erróneas?

Las respuestas pueden incluir ideas sobre los problemas que hacen los niños en la escuela como, $3 + 2 =$, $7 - 4 =$. El signo de igual siempre sigue el problema que ellos tienen que hacer. Si estas respuestas no surgen, pregunte:

¿Cómo se le presenta el signo igual a los niños?

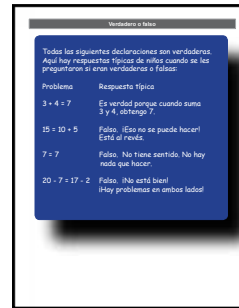
$(3+4= \quad 5+6=)$

5. Escriba unos ejemplos de este tipo de problemas en el papel grande o en el proyector para que todos los vean. Diga:

Los educadores piensan que los malentendidos que tienen los niños sobre el signo igual se debe en parte a estar expuestos sólo a este tipo de problemas. Las investigaciones ayudan a los educadores a

Notas

BLM 101: Transparencia / Hoja



Actividades

Parte 3: El signo de igual (continuación)	Notas
<p>identificar las ideas erróneas y explorar maneras para volver a enseñar los conceptos con el fin de que todos los niños puedan tener éxito. Los estudiantes de matemática necesitan tener éxito en el futuro. Es este tipo de información que está causando cambios en la educación de matemática. Estos cambios están ocurriendo porque TODOS los estudiantes necesitan tener éxito en matemática. (No sólo unos cuantos, sino todos.)</p>	
Parte 4: Desarrollando una comprensión del signo igual (20 minutos)	
<p>1. Diga: <i>Ahora que sabemos que el signo igual es usualmente misinterpretado por los niños vamos a concentrarnos en maneras de ayudarlos a entender el signo igual.</i></p> <p>Diga a los participantes que ahora aprenderán unas estrategias para hacer preguntas. Trabajarán con afirmaciones de igualdad (declaraciones con el signo igual) y usan preguntas para entender el pensamiento detrás de cada respuesta de los niños. Luego usarán lo que aprendieron con sus propios niños.</p> <p>2. Presente afirmaciones verdaderas y falsas, $8 + 4 = 12$, en papel grande o en el proyector. Dé a los participantes tiempo para pensar si la afirmación es falsa o verdadera. Escriba la segunda afirmación (Vea la Nota B) y de nuevo pídale que determinen si es falsa o verdadera y que expliquen por qué. Pida a los participantes que compartan sus ideas sobre las primeras dos preguntas. Mientras vayan compartiendo haga preguntas como:</p> <p><i>¿Cómo decidió si la afirmación era falsa o verdadera? ¿Qué hizo primero? ¿Después? ¿Alguien lo hizo de otra manera? ¿Lo podría haber hecho de otra manera? ¿Qué es lo que sabe sobre esos números? ¿Cómo podría mostrar su razonamiento usando materiales prácticos?</i></p> <p>Indique que usted hace preguntas para descubrir su pensamiento matemático y que ellos necesitan aprender a hacer estas mismas preguntas a sus hijos.</p> <p>3. Dígales que les va a dar más de estas afirmaciones verdaderas o falsas. Ellos deben analizar 1 para determinar si es falsa o verdadera. Luego trabajando en parejas una persona dará la respuesta de falsa o verdadera y la otra</p>	<p>NOTA B: Las afirmaciones verdaderas o falsas a usar:</p> <p>$8 + 4 = 12$ (verdadera) $8 = 3 + 5$ (verdadera) $9 + 7 = 15$ (falsa) $9 + 3 = 9 + 3$ (verdadera) $11 + 2 = 1 + 11$ (falsa) $10 - 6 = 12 - 8$ (verdadera) $373 + 458 = 1481$ (falsa) $2348 - 476 = 286$ (falsa) $58 + 38 - 38 = 58$ (verdadera) $87 \times 1 = 88$ (falsa)</p>

Actividades

Parte 4: Desarrollando una comprensión del signo igual (continuación)

practicará haciendo preguntas para clarificar el pensamiento. Muestre **BLM 102: Investigando el pensamiento** y distribuya la hoja. Pídales empezar el proceso para identificar si son verdaderas o falsas y que hagan preguntas. También ellos pueden hacer otras preguntas. Déles 10 minutos para completar esta actividad, Pueden usar lápiz y papel para resolver o usar cálculos mentales.

4. Hable sobre estas experiencias. Pregunte:

¿Qué aprendió al hacer esto?

Los comentarios pueden estar relacionados a:

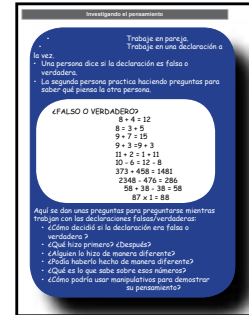
- Diferentes maneras de pensar de la gente.
- Escuchar y entender.
- Hablar sobre como piensa uno ayuda a entender mejor.

Es muy útil anotar estos comentarios en papel grande. Diga:

Ahora que ya han practicado haciendo esta clase de preguntas ustedes tendrán la oportunidad de usarlas con sus hijos.

Notas

BLM 102: Transparencia / Hoja



Parte 5: Trabajando con los estudiantes (25 minutos)

Veá Nota C.

1. Dígales a los participantes que los niños regresarán ahora. El propósito será descubrir lo que ellos saben sobre el signo igual. Déjeles saber que ellos sólo deben observar a sus hijos y hacerles preguntas para intentar entender sus pensamientos. El propósito no es el de enseñar sino observar e intentar entender cómo piensan los niños sobre el signo igual. También, diga a los padres que tal vez los niños necesiten usar materiales prácticos para hacer sus cuentas y determinar si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Recuérdeles que los materiales prácticos están en la mesa. Recuérdeles que las estadísticas indican que muchos niños no entienden el signo igual.

2. Después que los niños han tomado asiento, empiece preguntando a los niños que significa cuando algo es verdadero o falso.

- *¿Qué quiere decir cuándo algo es verdadero?*
- *¿Qué quiere decir cuándo algo es falso?*

Discuta esto brevemente. Déjeles saber que ellos estarán trabajando con algunas operaciones numéricas y que ellos decidirán si son verdaderas o falsas.

NOTA C: Mientras los participantes resuelven las operaciones es importante que ellos compartan sus estrategias (los métodos que usaron para resolverlas). Al compartirlas ellos aprenden unos de los otros y ven que hay muchas maneras de hacer matemática. Algunas maneras para determinar si una operación numérica es verdadera o falsa pueden ser:

- hacer la operación en ambos lados del signo de igual y comparar los resultados
- hacer que un lado de la ecuación se vea igual al otro lado
- usar el conocimiento de relación de números para determinar la igualdad

Actividades

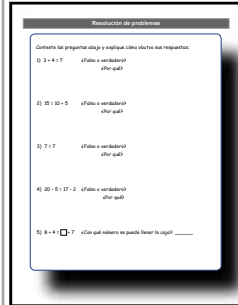
Parte 5: Trabajando con estudiantes (continuación)

3. Distribuya **BLM 103: Resolviendo problemas**. Pida a los estudiantes que resuelvan el primer problema ($3 + 4 = 7$) y que anoten si piensan si eso es verdadero o falso. Recuérdeles a los padres hacer preguntas adicionales usando su folleto **BLM 102: Investigando el pensamiento**. Pida a los padres que repitan el proceso con los demás problemas. De nuevo, el propósito no es enseñar sino descubrir qué es lo que los niños saben y piensan sobre el signo igual.

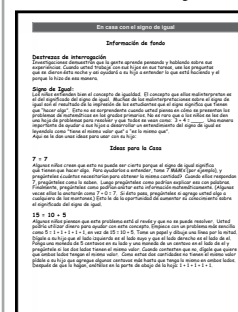
4. Después de dejar suficiente tiempo para terminar los problemas distribuya **BLM 104.1-2: En casa con el signo igual**. Diga a los padres que las actividades los ayudarán a ayudar a sus hijos a desarrollar un entendimiento del signo igual y que este significa "lo mismo que" o "teniendo el mismo valor que".

Notas

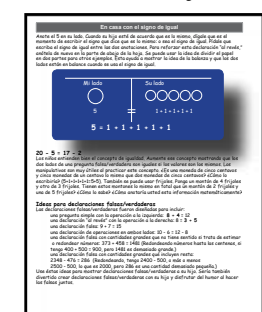
BLM 103: Hoja



BLM 104.1: Hoja



BLM 104.2: Hoja



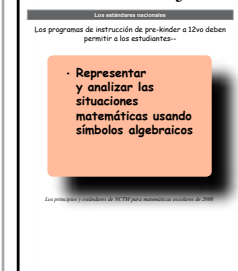
Parte 6: Conexiones (10 minutos) - con niños

1. Conecte las actividades del taller con los estándares de NCTM conversando sobre cómo las raíces del pensamiento algebraico comienzan en la escuela primaria. Muestre BLM 105: El estándar de álgebra de NCTM y muestre a los participantes cómo han analizado la situación matemática que se representa en una ecuación.

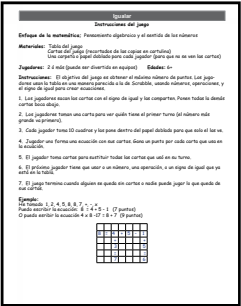
2. Termine la sesión haciendo unas o todas las siguientes preguntas. Asegúrese de anotar las respuestas de los participantes.

- ¿Cuáles son algunos de los conceptos importantes que hablamos hoy?
(El signo igual, el significado del signo igual es "lo mismo que", malentendidos, afirmaciones verdaderas o falsas, los estudios e investigaciones nos da información importante sobre el aprendizaje de matemática, el signo igual es la base para el pensamiento algebraico, etc.)
- ¿Qué significado tiene el signo igual?
(Lo mismo que, tiene el mismo valor que)
- ¿Qué clase de problemas ayudan a los niños a entender el significado del signo igual?

BLM 105: Hoja



Actividades

Parte 6: Conexiones (continuación) - con niños	Notas
<p>(Afirmaciones verdaderas o falsas, afirmaciones de igualdad)</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Por qué es importante entender el signo igual? (Es la base para el álgebra y el pensamiento o razonamiento algebraico). • ¿Cómo podría usar las preguntas que se trataron esta noche? (Para ayudar a los niños a hacer tareas, entender como piensan los niños) 	
Parte 7: Aplicaciones para la casa (5 minutos)	
<p>1. Se distribuyó BLM 104.1-2: En casa con el signo igual en la parte 5. Recuerde a los padres que usen las preguntas de la hoja BLM 102: Investigando el pensamiento (distribuido en la parte 4) cuando trabajan con sus hijos en casa.</p> <p>2. Distribuya BLM 106.1-3: El juego de igualar. Explique el juego y si hay tiempo, juegue una ronda o dos. Dígalos a los participantes que se puede hacer este juego en casa con sus hijos.</p>	<p>BLM 106.1-3: Hojas</p> 
Parte 8: Cierre (5 minutos)	
<p>1. Si su distrito no tiene un formulario de evaluación, puede usar una pregunta parecida a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué aprendió hoy? • ¿Qué hará ahora con su hijo como resultado de esta sesión? • ¿Qué le pareció interesante hoy? <p>2. Distribuya los premios de los cálculos aproximados o sorteos.</p> <p>3. Agradezca su presencia a los participantes, sobre todo porque sabe que muchos están muy ocupados.</p>	

